UC SAN DIEGO
SCIENCE _ENGINEERING LIBRARY

ATTN: DEBBIE COX
PHONE:
FAX:
E-MAIL:SCILIB@UCSD.EDU

SUBMITTED:
PRINTED: 2002-10-31 12:13:00
REQUEST NO.:REG-10001826
SENT VIA: Manual
Interlibrary Request

REG Regular Copy Journal

REQUESTER INFO: Alexander Teplyaev
DELIVERY: E-mail Post to Web: SCILIB@UCSD.EDU
REPLY: Mail:

THIS IS NOT A BILL.

INTERLIBRARY LOAN REQUEST FOR ARTICLE

This form is also available on our web page. http://scilib.ucsd.edu/forms/article.html

After ______ I will no longer need this item. (please specify date)

Material is to support: ☐ research ☐ coursework for ______ class (please specify course number)

REQUESTER Alexander Teplyaev STATUS: FAC (ACAD) GRAD UGRAD STAFF

DEPT/MAJOR Math DAYTIME PHONE ______ DATE 10/29/02

MAIL CODE ______ EMAIL teplyaev@euclid.ucsd.edu INDEX NO. ______

____ Notify; I will pick up at S&E circ desk √ ~~Mail~~ Avanti article to me Fax quality acceptable? Yes No (faxed to S&E only)

PERIODICAL TITLE Doklady Akademii nauk SSSR

Volume 320 Issue 1 Date 1991 Pages 49-53

ARTICLE AUTHOR Teplyaev, A.V.

ARTICLE TITLE The pure point spectrum of random orthogonal polynomials

THIS SECTION FOR LIBRARY STAFF USE

DATE REQUESTED 10/29/02

SENT TO UCLA SEL/EMS

COPYRIGHT COMPLIANCE ( ) CCG (X) CCL

FROM INTERLIBRARY LOAN SERVICES
SCIENCE & ENGINEERING LIBRARY 0175E
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SAN DIEGO
9500 GILMAN DRIVE
LA JOLLA, CA 92093-0175

FAX 858-534-5583 VOICE 858-534-1219

We lack.

Thanks!

ILL# ______

LIBRARIES ______ DATE SENT ______ BY ______

LIBRARIES ______ DATE SENT ______ BY ______

LIBRARIES ______ DATE SENT ______ BY ______

RECEIVED DATE ______ NOTIFIED ______ ☐ OCLC ☐ LOG ☐ STAT

Доклады Академии наук СССР
1991. Том 320, № 1

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

 А.В. ТЕПЛЯЕВ

ЧИСТО ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР СЛУЧАЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 18 V 1991)

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$(1) \qquad |a_n| < 1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Построим последовательность многочленов с помощью рекуррентных соотношений

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi_{n+1}(z) &= (1 - |a_n|^2)^{-1/2}(z\varphi_n(z) - \overline{a}_n\varphi_n^*(z)), \\ \varphi_{n+1}^*(z) &= (1 - |a_n|^2)^{-1/2}(\varphi_n^*(z) - a_n z\varphi_n(z)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

с начальными условиями $\varphi_0(z) = \varphi_0^*(z) = 1$. Хорошо известно, что существует единственная борелевская вероятностная мера σ на окружности $T = \{z \in \mathbf{C}: |z| = 1\}$ такая, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована в $L^2_{\sigma,T}$ (см. [2]). Через μ и ν мы будем обозначать стандартные меры Лебега на окружности T и в круге $|z| < 1$.

Задача о свойствах спектральной меры случайных ортогональных на окружности многочленов была поставлена и решена Е.М. Никишиным в [3] для случая, когда параметры $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ представляют собой последовательность независимых симметрично распределенных случайных величин, каждая из которых может принимать только два значения, и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. В работе [4] доказано, что теми свойствами, на которые обратил внимание Е.М. Никишин, мера σ будет обладать и при более слабых ограничениях на случайные параметры. Именно, если независимые случайные величины таковы, что почти наверное выполняется условие (1), $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}|a_n|^2 < \infty$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |Ea_n| < \infty$, то с вероятностью единица: а) мера σ абсолютно непрерывна (относительно μ); б) существует $\epsilon < 0$ такое, что функция $\exp\{\epsilon|\log\sigma'| \cdot \log|\log\sigma'|\} \in L^1_{\mu,T}$ (где σ' – плотность меры σ по отношению к μ). В отличие от описанной выше ситуации здесь мы рассмотрим такие случайные параметры, что с вероятностью единица мера σ не имеет абсолютно непрерывной компоненты.

Основным результатом настоящей работы является

Т е о р е м а 1. *Пусть параметры $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ системы ортогональных многочленов представляют собой последовательность независимых одинаково распределенных комплекснозначных случайных величин такую, что с вероятностью единица выполняется условие* (1), *распределение случайной величины a_0 абсолютно непрерывно относительно ν и* $\mathrm{E}\log(1 - |a_0|) > -\infty$. *Тогда с вероятностью единица мера σ, соответствующая этой последовательности параметров, дискретна.*

Доказательство опирается, во-первых, на то, что показатель Ляпунова γ, который определяется соотношением (9), больше нуля с вероятностью единица,

4. 1474

во-вторых, на критерий отсутствия у меры σ абсолютно непрерывной и сингулярно непрерывной компонент, который сформулирован в теореме 2 и может представлять самостоятельный интерес.

Приведенные в настоящей работе результаты весьма схожи с результатами Б. Саймона и Т. Вольфа, касающимися дискретных одномерных операторов Шредингера со случайным эргодическим потенциалом [6] и одномерных возмущений самосопряженных операторов [7].

Заметим, что в теореме 1 независимость параметров $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ используется лишь только при доказательстве положительности показателя Ляпунова.

Теорема 2, равно как и леммы 1, 2 и 3, верна и для неслучайной последовательности параметров.

Предположим, что фиксирована последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию $|a_n| < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть для любого λ из области $|\lambda| < 1$ σ_λ – это спектральная мера, соответствующая последовательности параметров $\{\lambda, a_1, a_2, \ldots\}$. Определим функции

$$F_\lambda(z) = \int_T \frac{x+z}{x-z}\, d\sigma_\lambda(x),$$

$F_\lambda(z)$ – преобразование Стилтьеса меры σ_λ и

$$G_\lambda(z) = \int_T \frac{1}{|x-z|^2}\, d\sigma_\lambda(x).$$

Т е о р е м а 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(I) *Почти для всех* λ *из области* $|\lambda| < 1$ *(относительно* ν*) мера* σ_λ *дискретна.*

(II) *Почти для всех* $z \in T$ *(относительно* μ*)* $G_0(z) < \infty$.

Теорема 2 легко следует из леммы 1 и 2, которые мы приводим ниже без доказательства. Далее мы даем необходимые определения и намечаем доказательство леммы 3. После формулировки этой леммы следует несложное рассуждение, которое на основе леммы 3 показывает, что для случайных параметров из теоремы 1 с вероятностью единица выполняется условие (II) теоремы 2.

Пусть σ_λ^{pp}; σ_λ^{sc} и σ_λ^{ac} – это соответственно чисто точечная, сингулярно непрерывная и абсолютно непрерывная компоненты меры σ_λ (по отношению к μ).

Л е м м а 1. *Пусть* $A = \{z \in T\colon G_0(z) < \infty\} \cup \{z \in T\colon \sigma_0(\{z\}) > 0\}$, $B = \{z \in T\colon$ *существует предел* $F_0(z) = \lim\limits_{r \uparrow 1} F_0(rz)$ *и* $\operatorname{Re} F_0(z) > 0\}$. *Тогда для любого* λ *из области* $|\lambda| < 1$ $\sigma_\lambda^{pp}(T \setminus A) = 0$, $\sigma_\lambda^{ac}(T \setminus B) = 0$, $\sigma_\lambda^{sc}(A \cup B) = 0$.

Л е м м а 2. *Пусть мера* τ *на* T *определена следующим образом*:

$$\tau(A) = \frac{1}{\pi} \int_{|\lambda| < 1} \sigma_\lambda(A)\, d\nu(\lambda)$$

для любого борелевского множества $A \subset T$.

Тогда меры τ *и* μ *эквивалентны. Преобразование Стилтьеса* $F_{(\tau)}(z)$ *меры* τ *удовлетворяет соотношению*

$$F_{(\tau)}(z) = 1 + \frac{F_0(z) - 1}{F_0(z) + 1}.$$

При доказательстве этих лемм существенно используется формула, которая позволяет выразить преобразование Стилтьеса $F_\lambda(z)$ меры σ_λ через преобразование Стилтьеса $F_0(z)$ меры σ_0:

$$F_\lambda(z) = \frac{z(1+\lambda z)(F_0(z)+1)+(z+\overline{\lambda})F_0(z)-1)}{z(1-\lambda z)(F_0(z)+1)+(\overline{\lambda}-z)(F_0(z)-1)}.$$

Это соотношение можно вывести из разложения функции $F_\lambda(z)$ в непрерывную дробь, полученного Я.Л. Геронимусом в [1].

Далее нам не придется рассматривать зависимость меры σ от параметра с нулевым номером. Поэтому мы будем считать, что фиксирована последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющая условию (1).

Теперь мы определим унитарный оператор в пространстве последовательностей, который, с одной стороны, естественным образом связан с отношениями (2), с другой стороны, соответствует оператору умножения на x в пространстве $L^2_{\sigma,T}$.

Пусть $l^2_{[0,\infty)}$ – гильбертово пространство последовательностей, $e_0, e_1, e_2, \ldots$ – естественный базис в нем (т.е. $(e_n)_m = \delta_{nm}$). Определим изометрическое отображение $\mathcal{U}$: $l^2_{[0,\infty)} \to L^2_{\sigma,T}$, положив для базисных векторов $\mathcal{U}(e_n) = \overline{\varphi}_n$. Пусть H – унитарный оператор умножения на свободную переменную в $L^2_{\sigma,T}$, т.е. при любом $\zeta \in L^2_{\sigma,T}$ $(H\zeta)(x) = x\zeta(x)$. Нужный нам оператор $\mathcal{H}$: $l^2_{[0,\infty)} \to l^2_{[0,\infty)}$ задается формулой $\mathcal{H} = \mathcal{U}^* H \mathcal{U}$. При помощи соотношений, установленных в [2], можно показать, что элементы матрицы, определяющей оператор $\mathcal{H}$,

$$(3)\qquad \langle \mathcal{H}e_k, e_n\rangle = \begin{cases} 0, \; k>n+1, \\ \sqrt{1-|a_n|^2}, \quad k=n+1, \\ -\overline{a}_n a_{k-1}\prod\limits_{p=k}^{n-1}\sqrt{1-|a_p|^2}, \quad 1\leqslant k\leqslant n, \\ \overline{a}_n \prod\limits_{p=0}^{n-1}\sqrt{1-|a_p|^2}, \quad k=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что унитарность оператора $\mathcal{H}$ эквивалентна условию

$$(4)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty.$$

Таким образом, получено еще одно – прямое – доказательство известного факта, что линейная оболочка функций $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ плотна в $L^2_{\sigma,T}$ тогда и только тогда, когда выполнено (4).

Далее, до леммы 3, мы будем считать, что z – фиксированное комплексное число и $|z| = 1$. Из (3) следует, что z тогда и только тогда будет собственным числом оператора $\mathcal{H}$, когда существует последовательность комплексных чисел $\{\psi_n\}_{n=0}^\infty$ такая, что

$$(5)\qquad 0 < \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty;$$

$$(6)\qquad z\psi_n = \sqrt{1-|a_n|^2}\,\psi_{n+1} - \overline{a}_n \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}\prod_{p=k}^{n-1}\sqrt{1-|a_p|^2}\,\psi_k + \overline{a}_n \prod_{p=0}^{n-1}\sqrt{1-|a_p|^2}\,\psi_0.$$

Можно показать, что если ψ_0 и ψ_0^* – некоторые комплексные числа, а последовательность $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ построена согласно рекуррентным соотношениям

$$\psi_{n+1} = (1 - |a_n|^2)^{-1/2}(z\psi_n - \bar{a}_n\psi_n^*), \tag{7}$$
$$\psi_{n+1}^* = (1 - |a_n|^2)^{-1/2}(\psi_n^* - a_n z\psi_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

то

$$z\psi_n = \sqrt{1 - |a_n|^2}\,\psi_{n+1} - \bar{a}_n \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \prod_{p=k}^{n-1} \sqrt{1 - |a_p|^2}\,\psi_k + \tag{8}$$
$$+ \bar{a}_n \prod_{p=0}^{n-1} \sqrt{1 - |a_p|^2}\,\psi_0^*.$$

Таким образом, из (6) и (8) следует, что z тогда и только тогда является собственным числом $\mathcal{H}$, когда при $\psi_0 = \psi_0^*$ выполняется (7) и (5), т.е. $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2 < \infty$.

Заметим, что в условии теоремы 1 параметры $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ таковы, что (4) выполняется с вероятностью единица. Таким образом, не умаляя общности, можно считать, что условие (4) выполнено и образ отображения $\mathcal{U}$ равен всему $L^2_{\sigma,T}$ (т.е. оно унитарно).

Пусть $G(z) < \infty$. Тогда $\operatorname{Re} F(z) = 0$ и функция $f\colon x \mapsto \dfrac{x}{z - x}$ принадлежит $L^2_{\sigma,T}$. При этом f удовлетворяет уравнению $zf = Hf + H1$ (где $1 \in L^2_{\sigma,T}$ и $1(x) \equiv 1$). Пусть $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – последовательность, являющаяся образом f при отображении $\mathcal{U}^*$. Тогда $\psi_0 = -\frac{1}{2}(1 + F(z))$ и, согласно (3), справедливо равенство (8) при $\psi_0^* = \psi_0 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}F(z)$. Следовательно, справедливы рекуррентные соотношения (7) с данными начальными условиями и $\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty$. Нетрудно видеть, что верно и обратное утверждение.

Лемма 3. *Для любого $z \in T$ следующие утверждения равносильны*:

I. *Либо $G(z) < \infty$, либо мера σ имеет атом в z.*

II. *Существуют комплексные, не равные одновременно нулю числа ψ_0 и ψ_0^* такие, что $\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty$, где $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется согласно* (7).

Определим матрицы

$$g_n(z) = (1 - |a_n|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} z & -\bar{a}_n \\ -a_n z & 1 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из (7) следует, что

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_{n+1}^* \end{pmatrix} = g_n(z) \dots g_0(z) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix}.$$

Согласно условию теоремы 1 эти случайные матрицы таковы, что для любого $z \in T$ существует положительное число γ (показатель Ляпунова) такое, что с вероятностью единица

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \| g_n(z) \dots g_0(z) \| = \gamma \tag{9}$$

(см. [5]). Отсюда следует, что почти наверное существуют такие комплексные числа ψ_0 и ψ_0^*, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \| g_n(z) \dots g_0(z) \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0^* \end{pmatrix} \| = -\gamma,$$

а это влечет условие II леммы 3. Так как матрица $g_0(z)$ обратима, выполнение этого условия не зависит от значения параметра a_0, т.е. почти наверное справедливо условие II теоремы 2, что доказывает теорему 1.

Замечание. Положительность показателя Ляпунова не является принципиально важной в данном доказательстве, так как, по-видимому, условие II леммы 3 можно доказать непосредственно при более слабых ограничениях на случайные параметры.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
31 V 1991

ЛИТЕРАТУРА

1. *Геронимус Я.Л.* – Мат. сб. Нов. сер., 1944, т. 15, вып. 1, с. 99–130. 2. *Геронимус Я.Л.* Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958. 240 с. 3. *Никишин Е.М.* – Вестн. МГУ. Сер. 1, 1987, № 1, с. 52–55. 4. *Тепляев А.В.* – Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1989, т. 117, с. 157–162. 5. *Bougerol P., Lacroix J.* Products of random matrices with applications to random Schrödinger operators. Boston: Birkhauser, 1985, Progress in Prob. and Stat, vol. 8, 283 p. 6. *Simon B.* – Comm. Math. Phys., 1985, vol. 102, p. 327–336. 7. *Simon B., Wolff T.* – Comm. Pure Appl. Math., 1986, vol. 39, № 1, p. 75–90.